Correction du partiel du 8 novembre 2014

Exercice 1. ***Questions de cours.***

1. A est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à 2 inconnues réelles, d'après le cours, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(z-\mathrm{i})^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} z^{5-k}(-\mathrm{i})^k \\ &= z^5+5z^4(-\mathrm{i})+10z^3(-\mathrm{i})^2+10z^2(-\mathrm{i})^3+5z(-\mathrm{i})^4+(-\mathrm{i})^5 \\ &= z^5-5\mathrm{i}z^4-10z^3+10\mathrm{i}z^2+5z-\mathrm{i}\end{aligned}$$

3. L'ensemble des parties de E est $\mathcal{P}(E)=\big\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},E\big\}$.
   Comme E est de cardinal 3, on sait que $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal $2^3=8$ ce qui correspond à la liste ci-dessus.

Exercice 2.

1. L'application f est paire, continue et a le même sens de variation que la fonction carrée $x\mapsto x^2$.
   f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
   Elle admet un minimum en 0 et $f(0)=1$.
   Elle admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Le tableau de variation demandé en découle immédiatement.
2. $f([0,+\infty[)=\{f(x)\,|\,x\in[0,+\infty[\}=[1,+\infty[$
   car f est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
3. $f^{-1}([\frac{1}{2},+\infty[)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\in[\frac{1}{2},+\infty[\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\geqslant\frac{1}{2}\}$.
   D'après la question précédente, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 donc $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$ est vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   On en déduit que $f^{-1}([\frac{1}{2},+\infty[)=\mathbb{R}$.

   $f^{-1}([5,+\infty[)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\in[5,+\infty[\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\geqslant 5\}$.
   5 a pour antécédent -2 et 2.
   D'après le tableau de variation de f, on en déduit que $f^{-1}([5,+\infty[)=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$
4. f n'est pas injective car 5 admet 2 antécédents distincts par f.
   f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par f puisque le minimum de f est 1.
   f n'est donc pas bijective.
5. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(n)=n^2+1$.
   - g est injective.
     En effet, supposons $n,n'\in\mathbb{N}$ tels que $g(n)=g(n')$.
     $g(n)=g(n')\ \Rightarrow\ n^2-n'^2=(n-n')(n+n')=0\ \Rightarrow\ n=n'$ ou $n=-n'$.
     Comme n et n' sont positifs, $n=-n'\ \Rightarrow\ n=n'=0$.
     Donc dans tous les cas, $n=n'$. (CQFD)
   - g n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par g puisque le minimum de g est 1.
   - g n'est donc pas bijective.

Exercice 3.

1. L'écriture exponentielle de $-\mathrm{i}$ est $e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.
2. Les solutions de l'équation $z^3 = -\mathrm{i}$ sont par définition les racines troisièmes de $-\mathrm{i}$.
   On cherche z sous sa forme exponentielle notée $\rho\, e^{\mathrm{i}\alpha}$ ($\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$).
   $z^3 = -\mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; \rho^3\, e^{\mathrm{i}3\alpha} = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\rho^3 = 1\\ 3\,\alpha \equiv \frac{3\pi}{2}\;[2\pi]\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\rho = 1\\ \alpha \equiv \frac{\pi}{2}\;[\frac{2\pi}{3}]\end{cases}$.
   On en déduit que les racines troisième de $-\mathrm{i}$ sont : $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = -e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}} = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
3. $u = -\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{6} = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = z_1$.
   u est donc une racine troisième de $-\mathrm{i}$.
   Il suit que $u^3 = -\mathrm{i}$.
   $u^5 = u^3\,u^2 = -\mathrm{i}\,u^2 = -\mathrm{i}\big(-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\big)^2 = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$.
   $u^{11} = u^9\,u^2 = (-\mathrm{i})^3\,u^2 = \mathrm{i}\,u^2 = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = -u^5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$.
   $u^{24} = (u^3)^8 = (-\mathrm{i})^8 = 1$ car $-\mathrm{i}$ est une racine quatrième de l'unité.
4. D'après la question 3., $g(z) = -\mathrm{i}z - \mathrm{i}$.
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = z \;\Leftrightarrow\; \mathrm{i}z + z = -\mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-1-\mathrm{i}}{2}$.
   g admet un unique point fixe $\omega = \frac{-1-\mathrm{i}}{2}$.
   (b) $g(z)$ est de la forme $az + b$ avec $|\,a\,| = 1$ et $a \neq 1$, donc g est une rotation.
   (c) L'angle de g est $\arg a = \frac{3\pi}{2}$ et son centre est le point fixe $\omega = \frac{-1-\mathrm{i}}{2}$.
5. D'après la question 3., $h(z) = z - \mathrm{i}$.
   (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h(z) = z - \mathrm{i} \neq z$ donc h n'admet aucun point fixe.
   (b) $h(z)$ est de la forme $z + b$ donc h est une translation.
   (c) Le vecteur de h est $-\mathrm{i}$.

Exercice 4.

1. Cette équation du second degré a pour discriminant

$$\Delta = (3+\mathrm{i})^2 - 4(1+\mathrm{i})(2-2\mathrm{i}) = 8 + 6\mathrm{i} - 4.4 = -8 + 6\,\mathrm{i}.$$

   On calcule les racines carrées de Δ sous la forme $x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels. On a :

$$(x+\mathrm{i}\,y)^2 = -8 + 6\,\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8\\ 2xy = 6\\ x^2 + y^2 = \sqrt{64+36} = 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2\\ 2y^2 = 18\\ xy = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1\\ y^2 = 9\\ xy = 3\end{cases}$$

   Les racines carrées de Δ sont donc $1 + 3\,\mathrm{i}$ et $-1 - 3\,\mathrm{i}$.
   On en déduit que les solution de l'équation sont
   $z_1 = \dfrac{(-3-\mathrm{i}) + (1+3\,\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-1}{2}(1-\mathrm{i})^2 = \mathrm{i}$.
   et $z_2 = \dfrac{(-3-\mathrm{i}) - (1+3\,\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-4-4\,\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-4(1+\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = -2$.

2. $f^{-1}(\{0\})$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ résolue en 1.
   Donc $f^{-1}(\{0\}) = \{\mathrm{i}, -2\}$.

   $f^{-1}(\{2-2\mathrm{i}\})$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 2 - 2\,\mathrm{i}$.
   or $f(z) = 2 - 2\mathrm{i} \iff z\big((1+\mathrm{i})\,z + 3 + \mathrm{i}\big) = 0 \iff z = 0$ ou $z = \frac{-3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-1}{2}(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = -2 + \mathrm{i}$.
   Donc $f^{-1}(\{2-2\mathrm{i}\}) = \{0, -2+\mathrm{i}\}$.
3. Remarquons que g est bien définie car le dénominateur s'annule uniquement en i et -2.
   - g ne peut pas s'annuler puisque le numérateur est constant égal à 1.
     Il suit que $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.
   - $g^{-1}(\{\frac{1+\mathrm{i}}{4}\})$ est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -2\}$ de l'équation $g(z) = \frac{1+\mathrm{i}}{4}$.
     Pour tout $z \notin \{\mathrm{i}, -2\}$, $f(z)$ est non nul donc $g(z) = \frac{1+\mathrm{i}}{4} \iff \frac{1}{f(z)} = \frac{1+\mathrm{i}}{4} \iff f(z) = \frac{4}{1+\mathrm{i}} = 2 - 2\mathrm{i}$
     D'après la question 2., les solutions de $f(z) = 2 - 2\,\mathrm{i}$ sont 0 et $-2 + \mathrm{i}$ donc
     $g^{-1}(\{\frac{1+\mathrm{i}}{4}\}) = \{0, -2+\mathrm{i}\}$.
4. g n'est pas injective car $\frac{1+\mathrm{i}}{4}$ admet 2 antécédents distincts par g.
   g n'est pas surjective car 0 n'admet pas d'antécédent par g.
   g n'est donc pas bijective.